

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 1$. Συμβολίζουμε

$\Delta_i = \det$ (i-η υποπίνακα του A που προκύπτει κρατώντας τις γραμμές $1, 2, \dots, i$ κ' τις στήλες $1, 2, \dots, i$)

ΠΑΡΑΔ. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = \det([a]) = a$
 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \det A$

ΠΡΟΤΑΣΗ (ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ): Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Τ.Α.Ε.Ι :

i) A θετικά ορισμένος

ii) κάθε ιδιοτιμή του A είναι θετική

iii) $\Delta_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$

ΠΑΡΑΔ. Είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ θετικά ορισμένος;

ΛΥΣΗ: A συμμετρικός. $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 > 0$

Άρα A θετικά ορισμένος

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Τότε $\Delta_2 = \det(A) = 10 - 16 = -6 < 0$

Άρα A ΟΧΙ θετικά ορισμένος

Έστω $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ είναι ο A θετικά ορισμένος;

ΛΥΣΗ: $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = \det A = 5a - 16$

Άρα πρέπει κ' αρκεί $\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$

Ισοδύναμα $\begin{cases} a > 0 \\ 5a - 16 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ a > \frac{16}{5} \end{cases} \iff a > \frac{16}{5}$

Άρα A θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $a > \frac{16}{5}$

ΠΡΟΤΑΣΗ (ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ): Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Τ.Α. $\in I$:

i) A αρνητικά ορισμένος

ii) Κάθε ιδιοτιμή του A είναι αρνητική

iii) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 < 0$

Τησ αυστηρά, πρέπει $(-1)^i \Delta_i > 0$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$

ΠΑΡΑΔ. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ αρνητικά ορισμένος, γιατί έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές: -1 με πολλαπλότητα 2. Έχουμε $\Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = (-1)(-1) = 1 > 0$

ΠΑΡΑΔ. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -16 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -1, \Delta_2 = 16 \cdot 16 = 0$
άρα A ούτε θετικό ούτε αρνητικά ορισμένος

$\mathbb{R}^n$ $x_1, \dots, x_n$ $f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ με κάποιο $a_i \neq 0$

Τότε $\{a \in \mathbb{R}^n : f(a) = 0\}$ υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-1$

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ← ορθογώνιο βέκτης 2

Π.χ. $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ + 5x_1 x_2 \end{pmatrix}$ (+ γραμμικός όρος + σταθερό όρο 2 μεταβλητές. Καμπύλες στο επίπεδο, 3 μεταβλητές: επιφάνειες στον χώρο)

▲ ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Συμβολίζουμε

$$q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad q_A(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr}((x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $q_A(x_1, x_2) = \text{Tr}((x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) =$

$$= \text{Tr}((x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 10x_1 x_2 + 3x_2^2$$

q_A : τετραγωνική απεικόνιση που ορίζεται ο A

Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

μετρικός με $f = q_A$

ΠΑΡΑΔ. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3$

Τότε $f = q_A$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω βλέπουμε ότι f τετραγωνική μορφή $\Leftrightarrow \exists A_i$, ώστε
 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός, $f = q_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή.

Ο πίνακας $B = (b_{ij})$ είναι μοναδικός, γιατί

$b_{ij} = 0$ συντελεστής του x_i^2 στην f

$b_{ij} = \frac{1}{2}$ (ο συντελεστής του όρου $x_i x_j$ στην f)

Επίσης, έστω $e = (e_1, \dots, e_n)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Τότε $b_{ij} = f(e_i)$ και για $i \neq j$, $b_{ij} = f(e_i + e_j) - f(e_i) - f(e_j)$

Ανλ. η f σαν συνάρτηση $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ καθορίζει τον συμμετρικό πίνακα B .

▲ ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f_1, f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τετραγωνικές μορφές. Οι f_1, f_2 λέγονται
ΙΣΟΤΙΜΕΣ αν μπορούμε να πάρουμε από την f_1 στην f_2 με "αλλαγή μεταβλητών".
 Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1((x_1, \dots, x_n)P) \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

↑
ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑΝ

ΠΑΡΑΔ. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1((x_1, x_2)) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

Έστω $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ αντιστρέψιμος

Θέτουμε $f_2(x_1, x_2) = f_1((x_1, x_2)P) = f_1(x_1 + x_2, x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)x_2 + x_2^2 = x_1^2$

Άρα οι f_1, f_2 είναι ισοτίμες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Δεν έχουμε πληρωμένα τηλεφωνάκια από την f_1 στην f_2 γιατί ο P
 αντιστρέψιμος άρα ισχύει $f_1((x_1, \dots, x_n)) = f_2((x_1, \dots, x_n)P^{-1}) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

ΕΡΩΤΗΣΗ Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή. Υπάρχει $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισότιμη με την f και σε άλλη μορφή; Ποια είναι η g ; Είναι η άλλη μορφή της g ΜΟΝΑΔΙΚΗ, Τις γενικά, τότε είναι δύο τετραγωνικές μορφές ισότιμες;

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Έστω $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τετραγωνικές μορφές με αντίστοιχες συμμετρικούς πίνακες A_1 & A_2 (όδη $f_1 = q_{A_1}$, $f_2 = q_{A_2}$) $T, A \in \mathbb{I}$.

i) f, g ΙΣΟΤΙΜΕΣ

ii) $\text{rank}(A_1) = \text{rank}(A_2)$ και ο αριθμός των θετικών ιδιοτιμών

του A_1 = αριθμός των θετικών ιδιοτιμών του A_2

Παρατήρηση: $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Άρα A διαγωνίσιμος / $\mathbb{R}$.

από έχει ακριβώς η πραγματικές ιδιοτιμές. Έστω a_1 από αυτές αρνητικές,

a_2 ίσες με 0, a_3 θετικές. Ισχύει $a_1 + a_2 + a_3 = n$ (1)

Επίσης ισχύει $\text{rank}(A) = n - a_2$ (2)

Άρα αν ξέρουμε $\text{rank}(A)$ και το a_3 από τα (1) και (2) υπολογίζουμε το a_1 και a_2 .

ΠΑΡΑΔ. $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ συμμετρικός, $\text{rank}(A) = 7$, $a_3 = 3$. Τότε

$$(2) \Rightarrow 7 = 10 - a_2 \quad \text{Άρα } a_2 = 3$$

$$\text{Επίσης } (1) \Rightarrow a_1 = 4$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Αν $f_1 = q_{A_1}$, $f_2 = q_{A_2}$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τετραγ. μορφές. Τότε f_1 ΙΣΟΤΙΜΗ με f_2 αν και μόνο αν

αριθμός αρνητικών ιδιοτιμών των A_1 και A_2 ίσος
και αριθμός μηδενικών
και αριθμός θετικών

→

ΠΑΡΑΔ Έστω $f_1, f_2, \dots, f_6: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2^2$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$f_4(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$f_5(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$$

$$f_6(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x = x(x-3)$$

Τότε είναι f_1, f_2 ΙΣΟΤΙΜΕΣ;

$$f_1 = q_{A_1}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

ΒΑΣΗΝΙΔΑ

q_3

ΤΙΟΛΛΑΤΙΛΟΤΗΤΑ

0,2

A_1

1

1

0,1

A_2

1

1

1,1

A_3

2

2

1,-1

A_4

2

1

1,-1

A_5

2

1

-1,-1

A_6

2

0

Αρα f_1, f_2 ΙΣΟΤΙΜΕΣ

(γιατί ίδια rank κ' # θετικών ιδιοτιμών (με τιολλατιλότητα))

f_4, f_5 (ίδιος λόγος)

Διαφορετικά για $i \neq j$, f_i, f_j

ΟΧΙ ΙΣΟΤΙΜΕΣ

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή με $f = q_A$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός.

Έστω $d = \text{rank}(A)$, $q_3 = \#$ θετικών ιδιοτιμών του A .

Ορίζουμε $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 - x_{d+1}^2 - x_{d+2}^2 - \dots - x_n^2$

Τότε η f είναι ΙΣΟΤΙΜΗ με την g

→

ΠΑΡΑΔ. Έστω $\mathbb{R}^4$ με συντετ. x_1, x_2, x_3, t και $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $q((x_1, x_2, x_3, t)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$ τετραγωνική μορφή Minkowski παίζει σημαντικό
 ρόλο στην Ειδική Θεωρία Σχετικότητας του Einstein. Δεν είναι ισότιμη με
 την $f((x_1, x_2, x_3, t)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t^2$

ΠΑΡΑΔ. Έστω $f_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}$ $f_1 = q_{A_1}$ $\text{rank} = 3$ # θετ. ιδιοτιμών = 2

$$f_2 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} \quad \text{rank} = 3 \quad \# \text{ θετ. ιδιοτ.} = 1$$

$$f_3 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \quad \text{rank} = 3 \quad \# \text{ θετ. ιδιοτ.} = 3$$

και για $i=1,2,3$ $Z_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f_i(x_1, x_2, x_3) = 1\}$

f_2 : διχωνο υπερβολαειδές

f_1 : μονόχωνο υπερβολαειδές

Όταν x οι 3 είναι θετικές, είναι ελλειψαειδές (f_3)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει
 μοναδικός θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας B με $B^2 = A$

ΑΠΟΔ. Υπάρχει B : Αφού A θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας έχει n
 θετικές πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Επίσης υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος με

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Θέτουμε } B = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1} \text{ όπου } \sqrt{\lambda_i} \text{ η θετική τετραγωνική ρίζα του } \lambda_i$$

Φανερά $B^2 = A$. Ο B είναι συμμετρικός γιατί P ορθογώνιος $\Rightarrow P^{-1} = P^t$

$$\text{άρα } B = PDP^t. \text{ Συνεπώς } B^t = (PDP^t)^t = D^t P^t = PD^t = B$$

+1 (1) $\Rightarrow B$ ομοιος με D , άρα ο B έχει ιδιοτιμές $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$
 που είναι όλες θετικές. Άρα B θετικά ορισμένος.

Μοναδικότητα: Χωρίς απόδειξη